Glava 3.
OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

3.1. Diferencijalne jednačine prvog reda

Funkcije ćemo označavati sa $y = y(x)$, gdje smo istakli da je x nezavisno promjenljiva.

Definicija 1. Jednačinu

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

u kojoj figuriše bar jedan od izvoda nepoznate funkcije $y = y(x)$ nazivamo obična diferencijalna jednačina (u daljem tekstu DJ ili prosto jednačina).

Ako u DJ nepoznata funkcija zavisi od dvije ili više promjenljive, a jednačina sadrži parcijalne izvode, tada takvu jednačinu nazivamo parcijalna diferencijalna jednačina (PDJ).

Red DJ je red najvišeg izvoda koji figuriše u jednačini. Na primjer, jednačina $y'' + \sin(x + y') - 2y = 0$ je drugog reda.

Saglasno definiciji 1, DJ prvog reda ima opšti oblik

$$F(x, y, y') = 0 .$$

Ako se ova jednačina može riješiti po y' na jednoznačan način, tada dobijamo tzv. normalni oblik DJ prvog reda

$$y' = f(x, y) . \tag{1}$$

Kako je $dy = y'dx$, to se jednačina (1) može zapisati u obliku diferencijala (ili simetričnom obliku)

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 .$$

Za početak razmotrimo jednačinu (1). Neka je $G \subset R^2_{xy}$ oblast definisanosti funkcije $f(x, y)$ (Napomena: oblast je otvoren i povezan skup).

Definicija 2. Za funkciju $y = y(x),\ x \in I$ kažemo da je rješenje jednačine (1) ako su ispunjeni uslovi:

a) $y \in D(I)$ ($D(I)$ -skup diferencijabilnih funkcija na intervalu I),

b) $\forall x \in I : (x, y(x)) \in G$,

c) $\forall x \in I : y'(x) = f(x, y(x))$.

Uočimo da je rješenje $y = y(x),\ x \in I$ jednačine (1) neprekidna funkcija na intervalu *I*, jer iz diferencijabilnosti funkcije na intervalu *I* slijedi njena neprekidnost na intervalu *I*. (Da li važi obratno tvrđenje, tj. da li iz neprekidnosti funkcije na intervalu *I* slijedi njena diferencijabilnost na intervalu *I*? Ne.)

Grafik rješenja $y = y(x),\ x \in I$ jednačine (1) naziva se integralna kriva.

Neka $(x_0, y_0) \in G$. Zadatak da se odredi rješenje $y = y(x),\ x \in I$ jednačine (1) koje zadovoljava uslov

$$y(x_0) = y_0 , \tag{2}$$

nazivamo početni, ili Košijev zadatak, i označavamo kratko: Kz (1)-(2), ili Kz (1), (x_0, y_0). Sam uslov (2) nazivamo početni, ili Košijev uslov. Geometrijski Kz (1)-(2) znači određivanje integralne krive jednačine (1) koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0).

Kažemo da Kz (1)-(2) ima rješenje ako postoji $O(x_0)$ ($O(x_0)$ - okolina tačke x_0) i funkcija $y = y(x),\ x \in O(x_0)$ koja je rješenje jednačine (1) koje zadovoljava početni uslov (2).

Kažemo da Kz (1)-(2) ima jedinstveno rješenje, ako postoji $O(x_0)$ u kojoj se poklapaju sva rješenja Kz (1)-(2).

U teoriji jednačina postoje dva bitna pitanja: 1. Da li data jednačina ima rješenje i 2. Ako ima rješenje kako ga naći? Sa ovim pitanjima sretali smo se, na primjer, kod polinomnih jednačina, sistema linearnih jednačina, trigonometrijskih jednačina itd. Pitanje egzistencije rješenja polinomnih jednačina rješava osnovna teorema algebre: svaka polinomna jednačina stepena n ima tačno n rješenja u skupu kompleksnih brojeva (računa se višestrukost rješenja). Za sisteme linearnih jednačina to je poznata Kroneker-Kapelijeva teorema: Ako je rang matrice sistema jednak rangu proširene matrice, tada je taj sistem saglasan, tj. ima rješenje. Osnovne trigonometrijske jednačine $\sin x = a$ i $\cos x = a$ imaju rješenje za $|a| \leq 1$, dok jednačine $tgx = a$ i $ctgx = a$ imaju rješenje za svako $a \in R$.

Teorema 1 (Peano). Ako je $f \in C(G)$ ($C(G)$ - skup neprekidnih funkcija u oblasti *G*) i $(x_0, y_0) \in G$, tada Kz (1)-(2) ima rješenje.

Uočimo da Peanova teorema ne garantuje jedinstvenost rješenja.

1. Jednačina oblika $y' = f(x)$.

Primjer 1: Riješiti jednačine:

a) $y' = 1 + x - 2x^2$

$$y = \int(1 + x - 2x^2)dx = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + C.$$

b) $y' = \frac{1}{1+x^2}$

$$y = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

2. Jednačine sa razdvojenim promjenljivim

Opšti oblik DJ sa razdvojenim promjenljivim je $f(x)dx = g(y)dy$, gdje su f i g zadate funkcije. Rješava se direktnom integracijom:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy. \quad (1)$$

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$ a $G(y)$ primitivna funkcija za $g(y)$ iz (1) dobijamo:

$$F(x) + C_1 = G(y) + C_2$$

pa je $F(x) - G(y) = C_2 - C_1 = C$ pa je rešenje dato implicitno sa:

$$F(x) - G(y) = C.$$

Primjer 2: Riješiti jednačine:

a) $(1 + x^2)dy + x(1 + y^2)dx = 0.$

b) $y'(1 + x^2) = 2x\sqrt{1-y^2}.$

(2)

a) $(1+x^2)\,dy + x(1+y^2)\,dx = 0$

$$(1+x^2)\,dy = -x(1+y^2)\,dx$$

$$\frac{dy}{1+y^2} = -\frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = -\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arctg} y = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C = -\left(\ln\sqrt{1+x^2} - C\right)$$

$$y = -\operatorname{tg}\left(\ln\sqrt{1+x^2} - C\right)$$

$$\left[\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \left[\begin{matrix} 1+x^2 = t \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C\right]$$

b) Data jednačina ima smisla za $|y| \leq 1$.

1) Za $|y| < 1$:

$$y'(1+x^2) = 2x\sqrt{1-y^2}$$

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2}$$

$$(1+x^2)\,dy = 2x\sqrt{1-y^2}\,dx$$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$\arcsin y = \ln(1+x^2) + C$$

$$y = \sin\left(\ln(1+x^2) + C\right).$$

Scanned by TapScanner

2) Ispitujemo da li su $y=-1$ ili $y=1$ rješenja date jednačine.

$y=-1 \Rightarrow y'=0$ pa zamjenom u $y'(1+x^2)=2x\sqrt{1-y^2}$ dobijamo $0=0$.

Dakle, $y=-1$ jeste rješenje jednačine.
Slično je i $y=1$ rješenje.
Dakle, rješenja date jednačine su:
$y=\sin(\ln(1+x^2)+C)$, $y=-1$ i $y=1$.

3. Homogena jednačina

Jednačina oblika $y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow (*)$ nazivamo homogena jednačina. Smjenom $T=\frac{y}{x}$ ona se svodi na jednačinu sa razdvojenim promjenljivim.
Iz $y=xT$ slijedi $y'=T+xT'$ pa jednačina $(*)$ ima oblik:

$$T+xT'=f(T)$$

$$x\frac{dT}{dx}=f(T)-T$$

Za $f(T)-T\neq 0$: $\dfrac{dT}{f(T)-T}=\dfrac{dx}{x}$

Kad se riješi ova jednačina, ostaje da se ispita da li je sa $f(T)-T=0$ dato neko rješenje jednačine $(*)$.

Primjeri: Riješiti jednadžbe

a) $xy' = y + x\cos\frac{y}{x} \quad / : x$

$$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$$

Smjenom $T = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = T + xT'$ dobijamo:

$$T + xT' = T + \cos T$$

$$xT' = \cos T$$

$$x\frac{dT}{dx} = \cos T$$

$$\frac{dT}{\cos T} = \frac{dx}{x} \quad \left(\cos T \neq 0,\ T \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right)$$

$$\int \frac{dT}{\cos T} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin T}{1-\sin T}\right| = \ln|x| + C_1$$

$$\ln\sqrt{\left|\frac{1+\sin T}{1-\sin T}\right|} = \ln|x| + \ln C_2 = \ln C_2|x|$$

$$\frac{1+\sin T}{1-\sin T} = Cx^2$$

pa su rješenja data formulom:

$$1 + \sin\frac{y}{x} = Cx^2\left(1 - \sin\frac{y}{x}\right)$$

Provjerimo još da li su i funkcije $y = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x$ rješenja.

$y = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x \Rightarrow y' = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pa imamo:

$xy' = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x$ i $y + x\cos\frac{y}{x} = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x$ pa su i f-je $y = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)x,\ k \in \mathbb{Z}$ rješenja.

b) $(x^2+y^2)y' = 2xy$

$$y' = \frac{2xy \,/ : x^2}{x^2+y^2 \,/ : x^2}$$

$$y' = \frac{2\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Smjena: $T = \frac{y}{x}$ $\Longrightarrow T + xT' = \frac{2T}{1+T^2}$

$y = xT$

$y' = T + xT'$

$$x(1+T^2)T' = 2T - T - T^3$$

$$x(1+T^2)T' = T - T^3$$

1) za $T - T^3 \neq 0$ tj. $T \neq -1 \wedge T \neq 0 \wedge T \neq 1$ imamo:

$$x(1+T^2)\frac{dT}{dx} = T - T^3$$

$$\frac{1+T^2}{T-T^3}\,dT = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1+T^2}{T-T^3}\,dT = \ln|x| + \ln C_1$$

$$\ln|T| - \ln|1-T| - \ln|1+T| = \ln C_1|x|$$

$$C_1|x| = \left|\frac{T}{1-T^2}\right|$$

$$\frac{T}{1-T^2} = C_2 x$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} = C_2 x$$

$$y = C(x^2 - y^2)$$

2) Za $T=1$ tj. $\frac{y}{x}=1$ dobijamo $y=x$, $y'=1$ pa zamjenom u $y'=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ vidimo da je ~~y=x~~ funkcija $y=x$ rješenje.

Za $T=-1$ tj. $\frac{y}{x}=-1$ dobijamo $y=-x$ i slično se pokazuje da je f-ja $y=-x$ rješenje.

Za $T=0$ imamo $y=0$ i ova funkcija ~~nije~~ je rješenje.

4. Linearna jednačina

Jednačinu oblika $y'+P(x)y=Q(x)$ $\rightarrow (**)$ nazivamo linearna diferencijalna jednačina prvog reda.

Rješenje tražimo u obliku proizvoda dvije diferencijabilne funkcije u i v tj. u obliku $y=uv$.

Kako je $y'=u'v+uv'$ to zamjenom u $(**)$ dobijamo:

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$$

$$\text{tj. } (u'+P(x)u)v+uv'=Q(x)$$

Izaberimo funkciju u tako da je:

$$u'+P(x)u=0$$

$$\text{tj. } \frac{du}{u}=-P(x) \text{ tj. } u=e^{-\int P(x)dx}.$$

Tada je: $uv'=Q(x)$ tj. $v'=\frac{Q(x)}{u}=Q(x)e^{\int P(x)dx}$

odnosno: $v=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C$ pa je:

Rješenje jednačine $(**)$:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(C+\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx\right)$$

Primjer 4: Riješiti jednačine:

a) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Ovdje je $P(x) = 2x$, $Q(x) = xe^{-x^2}$ pa je:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx\right)$$

$$y = e^{-\int 2x\,dx}\left(C + \int xe^{-x^2} e^{\int 2x\,dx} dx\right)$$

$$y = e^{-x^2}\left(C + \frac{x^2}{2}\right).$$

$$\left[\int xe^{-x^2} e^{\int 2x\,dx} dx = \int xe^{-x^2} \cdot e^{x^2} dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_1\right)$$

b) $xy' - 2y = x^3 \cos x$

Data jednačina je za $x \neq 0$ ekvivalentna jednačini $y' - \frac{2}{x} y = x^2 \cos x$ čije je rješenje:

$$y = e^{\int \frac{2}{x} dx}\left(C + \int e^{-\int \frac{2}{x} dx} x^2 \cos x\, dx\right)$$

$$y = x^2 (C + \sin x)$$

$$\left[e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln|x|} = e^{\ln x^2} = x^2; \quad e^{-\int \frac{2}{x} dx} = e^{\ln \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}\right.$$

$$\int e^{-\int \frac{2}{x} dx} x^2 \cos x\, dx = \int \frac{1}{x^2} \cdot x^2 \cos x\, dx = \sin x + C_1 \Big)$$

5. Bernulijeva jednačina

Jednačina oblika $y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

naziva se Bernulijeva jednačina.

Smjenom $T=y^{1-\alpha}$ ona se svodi na linearnu jednačinu.

Primijetimo da je za $\alpha>0$ funkcija $y=0$ rješenje date jednačine. Za $y\neq 0$ imamo da je jednačina

$$y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$$

ekvivalentna jednačini:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$$

odnosno jednačini:

$$T'+(1-\alpha)P(x)T=(1-\alpha)Q(x)$$

a ovo je linearna jednačina koju znamo da riješimo.

Primjer 5: Riješiti jednačinu $y'+2xy=e^{x^2}y^2$

Očigledno f-ja $y=0$ je jedno rješenje date jednačine.

Za $y\neq 0$ imamo: $\frac{y'}{y^2}+2x\cdot\frac{1}{y}=e^{x^2}$.

Smjena: $T=\frac{1}{y}\Rightarrow T'=-\frac{y'}{y^2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad -T'+2xT=e^{x^2}$$

$$T'-2xT=-e^{x^2}$$

$$\Downarrow$$

linearna jednačina.

Рјешавамо линеарну једначину:

$$T' - 2xT = -e^{x^2}$$

$$T = e^{-\int -2x\,dx}\left(C + \int (-e^{x^2})\, e^{\int -2x\,dx}\, dx\right)$$

$$T = e^{x^2}(C - x).$$

$$\left[\int -e^{x^2} \cdot e^{\int -2x\,dx}\, dx = -\int e^{x^2} \cdot e^{-x^2}\, dx = -\int dx = -x + C_1\right]$$

Слиједи, $\frac{1}{y} = e^{x^2}(C - x)$ тј. $y = \frac{e^{-x^2}}{C - x}$.